Théorème de Cauchy-Lipschitz

(Rouvière)

Thm : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue, globalement lipschitzienne en la seconde variable.

$(P) : \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x, \quad t_0 \in I, x \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ admet une unique solution sur I tout entier.

Supposons dans un premier temps I compact.

· Si y est solution de (P), alors $\forall t \in I$, $y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$ et y est $\mathcal{C}^1$.
Réciproquement, cette formule donne une solution $\mathcal{C}^1$ à (P).
Ainsi, y sol de $(P) \iff y = F(y)$ où $F : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

$$y \mapsto x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

↳ On est donc ramenés à un pb de pt fixe.

· Notons k la constante de Lipschitz de f sur I, ℓ la longueur de I.
$\forall y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$, $e^{-k\ell} \|y\|_\infty \leq N_k(y) \leq \|y\|_\infty$ où $N_k(y) = \max_{t \in I} \{ e^{-k|t-t_0|} \|y(t)\| \}$
Les normes N_k et $\|\cdot\|_\infty$ sont donc équivalentes.
$(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m), \|\ \|_\infty)$ est complet, donc $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m), N_k)$ est complet.
De plus, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$ est stable par F. reste à voir F contractante.
Soient $y, z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$, $t \in I$, $t \geq t_0$.

$$\|F(y)(t) - F(z)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, z(s))\, ds \right\| \underset{\substack{IT \\ Lip}}{\leq} k \int_{t_0}^{t} \|y - z\| \leq N_k(y-z) \int_{t_0}^{t} k e^{+k(s-t_0)} ds$$

Donc $e^{-k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq N_k(y-z)\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right)$.
Si $t \leq t_0$, alors de même, $e^{-k(t_0-t)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq N_k(y-z)\left(1 - e^{-k(t_0-t)}\right)$
En somme : $e^{-k|t-t_0|} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq N_k(y-z)\left(1 - e^{-k|t-t_0|}\right)$

puis $N_k(F(y) - F(z)) \leq \left(1 - e^{-k\ell}\right) N_k(y-z)$

Donc par théorème de point fixe, F admet un unique point fixe.

Si I n'est pas compact, alors on écrit $I = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ avec $t_0 \in I_j$, I_j cpct pour tout $j \in \mathbb{N}$. On définit par ce qui précède y_j, unique sol. sur I_j.
→ Par unicité sur I_j, les y_j se raccordent, donc $y : t \mapsto y_j(t)$ si $t \in I_j$ est bien définie et solution de (P) sur I.
→ Si $\tilde{y}$ est solution de (P) sur I, alors $\forall j \in \mathbb{N}$, $\tilde{y}_{|I_j} = y_j$ par unicité sur I_j, donc il existe une unique solution sur I.